

Ebene Algebraische Kurven - Vorlesung 23 vom 29.06.16

Wir rekapitulieren die Definition einer rationalen Abbildung φ :

Für $f, g, h \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ setze $\Sigma_\varphi = \mathcal{V}(f, g, h)$

$\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$

falls $p \in \mathbb{P}^2 \setminus \Sigma_\varphi$, setze $p \mapsto (f(p) : g(p) : h(p))$.

Wir nennen Σ_φ auch den Basisort von φ .

Analog zu überall definierten Abbildungen existiert auch für rationale Abbildungen ein Invertierbarkeitsbegriff, der der sogenannten "rationalen Inversen".

Definition: Eine rationale Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ heißt *birationale Abbildung* mit rationaler Inverse $\psi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, falls

(i) für $p \in \mathbb{P}^2 \setminus \Sigma_\psi$ mit $\psi(p) \in \mathbb{P}^2 \setminus \Sigma_\varphi$ gilt $\varphi(\psi(p)) = p$

(ii) für $q \in \mathbb{P}^2 \setminus \Sigma_\varphi$ mit $\varphi(q) \in \mathbb{P}^2 \setminus \Sigma_\psi$ gilt $\psi(\varphi(q)) = q$.

Eine in der Vorlesung bereits behandelte rationale Abbildung ist die Inversion am Kreis $r \mapsto \frac{1}{r}$, vergleiche dazu die Vorlesungen 1 und 2.

Ebenso bekannt ist die Standard-Cremona-Transformation c , die durch

$$c(x : y : z) = (yz : zx : xy)$$

gegeben ist.

Für $p = (x : y : z)$ mit $xyz \neq 0$, d.h. $p \notin \Sigma_\varphi$, ist $c(c(p)) = p$, mit anderen Worten: c ist sein eigenes Inverses.

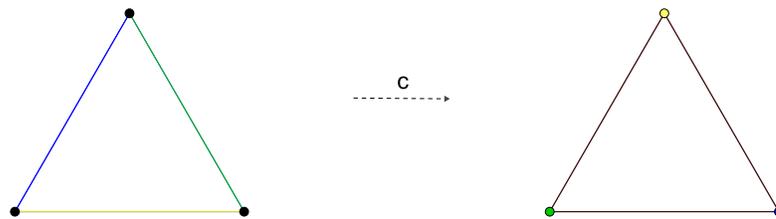


Abbildung 1: Auf - und Niederblasen

Den Umstand, dass c die Geraden $x = 0, y = 0, z = 0$ auf die Punkte $(1 : 0 :$

0), $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ abbildet und umgekehrt die Punkte auf die Geraden, formuliert man auch so, dass man sagt, die Geraden werden von c “niedergeblasen” und die Punkte “aufgeblasen”.

Definition: (Allgemeine Cremona-Transformation)

Es seien $A, B, C \in \mathbb{P}^2$ nicht auf einer Geraden liegend gewählt.

Weiter sei $V_2(A, B, C) := \{Q \in V_2 \mid Q(A) = Q(B) = Q(C) = 0\}$, die Menge aller Quadriken durch A, B und C .

Es gilt

$$\dim V_2(A, B, C) = 3, \quad V_2(A, B, C) = \langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$$

für drei Quadriken $Q_1, Q_2, Q_3 \in V_2$

Nun definieren wir die *Allgemeine Cremona-Transformation durch A, B, C* :

$$c_{ABC} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad p \mapsto (Q_1(p) : Q_2(p) : Q_3(p))$$

mit Basisort $\{A, B, C\}$.

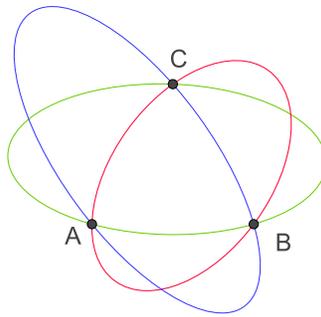


Abbildung 2: 3 Quadriken als Basis

Für $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1)$ erhalten wir als Spezialfall die Standard-Cremona-Transformation, für $A = (0 : 0 : 1)$, $B = (1 : i : 0)$, $C = (1 : -i : 0)$ die Inversion am Kreis.

Bemerkung: Für $M \in \mathbb{PGL}_3 = \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ erhält man

$$M \circ c_{ABC} \circ M^{-1} = c_{A', B', C'}$$

mit $A' = M(A)$, $B' = M(B)$, $C' = M(C)$.

Satz: (Max Noether)

Die Gruppe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ aller birationalen Abbildungen von $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ wird erzeugt von $\mathbb{PGL}_3 = \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ und c (Standard-Cremona-Transformation).

Auf einen Beweis soll an dieser Stelle verzichtet werden.

5.2 Bild und Urbild unter rationalen Abbildungen

Sei $\varphi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^2 \setminus \Sigma_\varphi \rightarrow \mathbb{P}^2$ eine birationale Abbildung.

$\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$: $\overline{\varphi(\mathcal{C} \setminus \Sigma_\varphi)}$:= "Bild" von \mathcal{C} unter φ ,

$\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$: $\overline{\varphi^{-1}(\mathcal{D})}$:= "Urbild" von \mathcal{D} unter φ .

Beides müssen keine Kurven sein, vergleiche das Verhalten der Koordinatenachsen unter der Standard-Cremona-Transformation.

Für $F \in \mathbb{C}[x, y, z]_n$; $\varphi = (f : g : h)$, mit $f, g, h \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ kann man bilden:

$$(F \circ \varphi)(x, y, z) = F(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) \in \mathbb{C}[x, y, z]_{nd}.$$

Sei nun $(F) \in \text{Div}(\mathbb{P}^2)$ ein Divisor von F , dann nenne

$$\varphi^*((F)) := (F \circ \varphi)$$

die *Totaltransformierte* von (F) .

Ist F irreduzibel, so ist $(F) =: \mathcal{D}$ eine irreduzible Kurve. Die Totaltransformierte $\varphi^*\mathcal{D}$ von \mathcal{D} ist i.A. reduzibel.

Beispiele:

Betrachte für die Standard-Cremona-Transformation c :

$$c: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \supset \mathcal{C} := V(\lambda x + \mu y + \nu z), \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C},$$

d.h. \mathcal{C} ist eine Gerade. Es ergibt sich die Totaltransformierte unter c zu

$$c^*(\lambda x + \mu y + \nu z) = \lambda yz + \mu xz + \nu xy.$$

Wählen wir $\lambda, \mu, \nu \neq 0$, d.h. geht \mathcal{C} nicht durch die Koordinatenpunkte, erhalten wir:

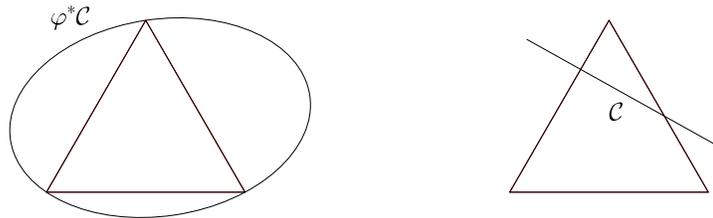


Abbildung 3: Totaltransformierte einer Geraden ohne Koordinatenpunkt

Im Fall $\nu = 0$ erhalten wir

$$c^*(\lambda x + \mu y + \nu z) = \lambda yz + \mu xz = (\lambda y + \mu x)z,$$

im Bild:



Abbildung 4: Totaltransformierte einer Geraden mit Koordinatenpunkt

Hierbei ist C' die *strikt Transformierte* von C , C' zusammen mit der rot gekennzeichneten Achse die Totaltransformierte von C .

Nun wollen wir geometrisch $\varphi^*(p)$ für ein $p \in \mathbb{P}^2$, also die Totaltransformierte eines Punktes bestimmen:

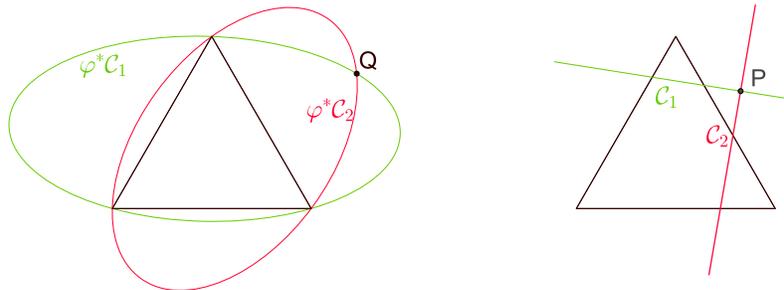


Abbildung 5: Totaltransformierte eines Punktes

Folglich sind Totaltransformierte von Punkten Punkte.

5.3 Satz: Es sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve, welche die Verbindungsgeraden AB, AC, BC der drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{P}^2$ nicht enthalte. Dann ist das Bild von C unter c_{ABC} eine Kurve $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$ vom Grad

$$\text{Grad}(\mathcal{D}) = 2 * \text{Grad}(C) - \text{mult}_A(C) - \text{mult}_B(C) - \text{mult}_C(C).$$

Beispiele: Für $\text{Grad}(\mathcal{C}) = 1$ haben wir drei Fälle:

Fall 1: - Gerade durch keinen Basispunkt

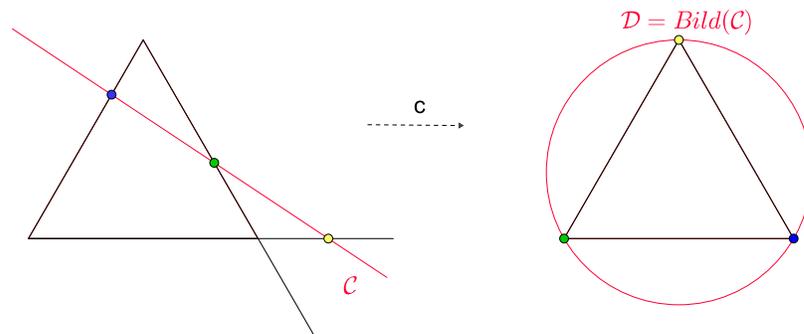


Abbildung 6: $\text{Grad}(\mathcal{C}) = 1$: Fall 1

Wir berechnen: $\text{Grad}(\mathcal{D}) = 2 * 1 - 0 - 0 - 0 = 2$

Fall 2: - Gerade durch einen Basispunkt

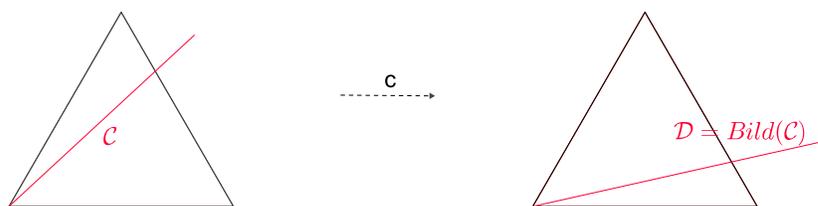


Abbildung 7: $\text{Grad}(\mathcal{C}) = 1$: Fall 2

Wir berechnen: $\text{Grad}(\mathcal{D}) = 2 * 1 - 1 - 0 - 0 = 1$

Fall 3: - Gerade durch zwei Basispunkte

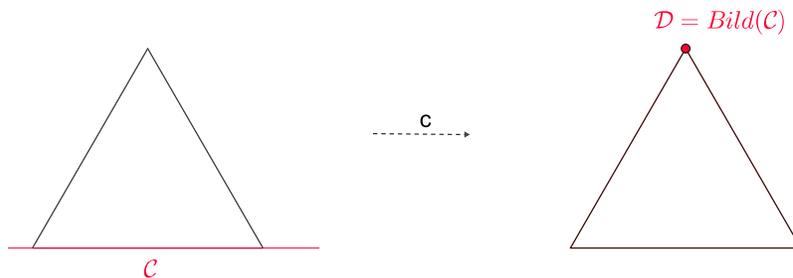


Abbildung 8: $\text{Grad}(\mathcal{C}) = 1$: Fall 3

$\text{Grad}(\mathcal{D}) = 2 * 1 - 1 - 1 - 0 = 0$ wurde von den Voraussetzungen eigentlich ausgeschlossen, da \mathcal{C} eine Koordinatenachse enthält, Formel stimmt aber trotzdem.

Für $\text{Grad}(\mathcal{C}) = 2$ haben wir sieben Fälle:

Fall 1:

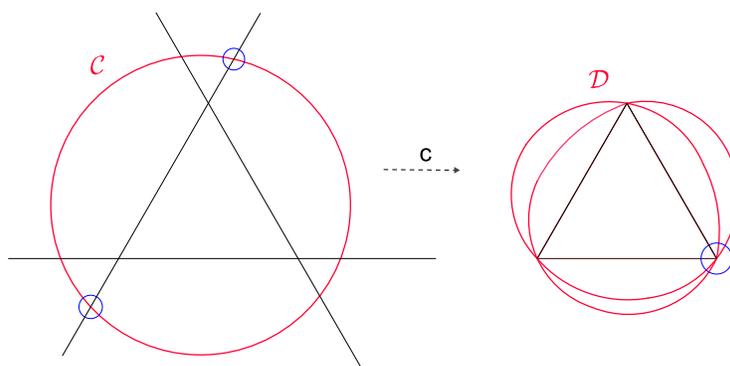


Abbildung 9: $\text{Grad}(\mathcal{C}) = 2$: Fall 1

Wir berechnen: $\text{Grad}(\mathcal{D}) = 2 * 2 - 0 - 0 - 0 = 4$

Dieses Beispiel wollen wir eingehender betrachten:

Geben wir uns für \mathcal{C} eine konkrete Parametrisierung vor, bspw.

$$\mathcal{C}: 0 = x^2 + y^2 + z^2,$$

erhalten wir für das Bild \mathcal{D} :

$$\mathcal{D}: 0 = G(x, y, z) = (yz)^2 + (xz)^2 + (xy)^2.$$

Letzteres ist eine Quartik mit 3 A_1 -Singularitäten. Wir berechnen

$$\partial_x G = 2xz^2 + 2xy^2 = 2x(z^2 + y^2)$$

$$\partial_y G = 2y(z^2 + x^2)$$

$$\partial_z G = 2z(x^2 + y^2).$$

D.h.

$$\Sigma = \{(0:0:1), (0:1:0), (1:0:0)\}.$$

In der affinen Gleichung erhalten wir bspw. für $z = 1$ zwei singuläre Tangenten $x + iy$ und $x - iy$:

$$z = 1 : x^2 + y^2 + x^2y^2 = (x + iy)(x - iy) + x^2y^2.$$

Um zu zeigen, dass der Grad der Bildkurve \mathcal{D} 4 ist, nehme eine Gerade \mathcal{G} im Bild, diese entspricht im Urbild einer Quadrik \mathcal{Q} . \mathcal{Q} schneidet unsere Ausgangskurve \mathcal{C} vom Grad 2 in 4 Punkten. Auch die Bildgerade \mathcal{G} schneidet \mathcal{D} in 4 Punkten, da kein Schnittpunkt in einem Basispunkt liegt und die Schnittpunkte somit auf vier verschiedene Punkte abgebildet werden, die immer noch Schnittpunkte sind. Nach Bézout hat dann \mathcal{D} Grad 4. Der Beweis des Satzes funktioniert analog.

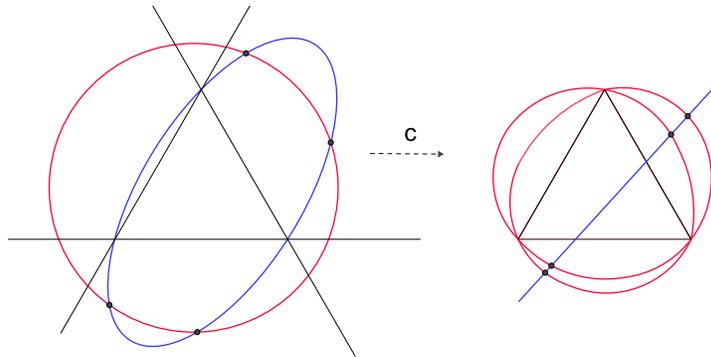


Abbildung 10: Bestimmung des Grades der Bildkurve durch Geradenschnitt

Fall 2:

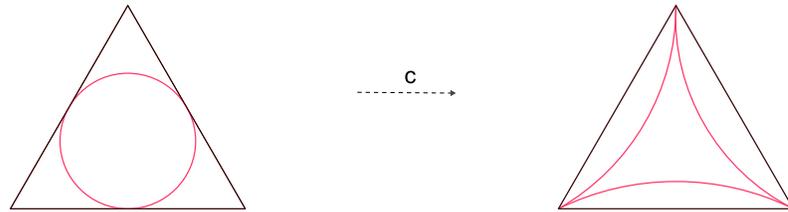


Abbildung 11: $Grad(\mathcal{C}) = 2$: Fall 2

Wir berechnen: $Grad(\mathcal{D}) = 4$
 \mathcal{D} bezeichnet man als 3-spitzige Hypozykloide.

Fall 3:

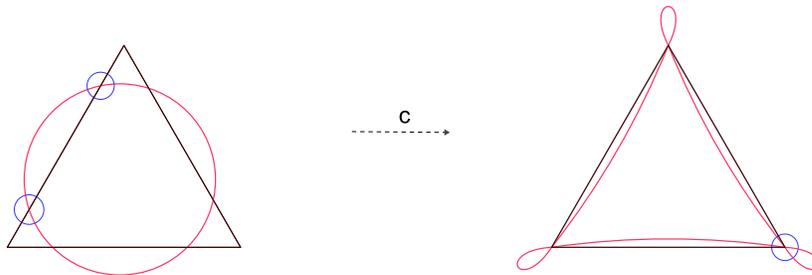


Abbildung 12: $Grad(\mathcal{C}) = 2$: Fall 3

Wir berechnen: $Grad(\mathcal{D}) = 4$

Fall 4:

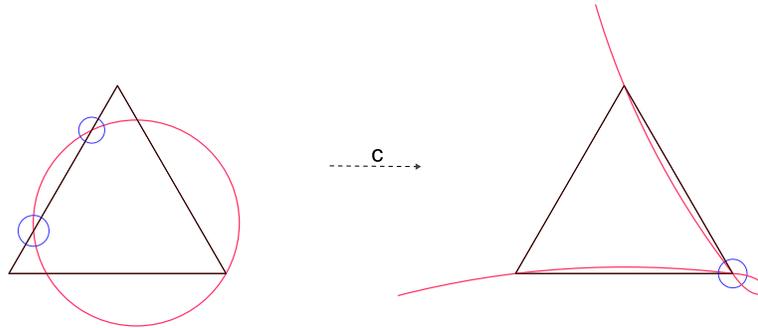


Abbildung 13: $Grad(\mathcal{C}) = 2$: Fall 4

Wir berechnen: $Grad(\mathcal{D}) = 2 * 2 - 1 - 0 - 0 = 3$
 \mathcal{D} bezeichnet man als nodale Kubik.

Fall 5:

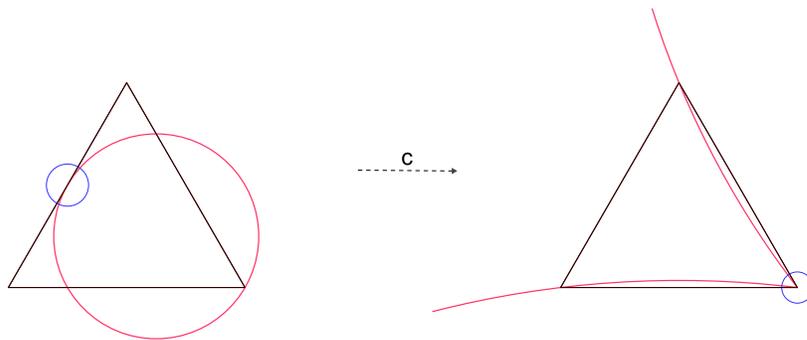


Abbildung 14: $Grad(\mathcal{C}) = 2$: Fall 5

Wir berechnen: $Grad(\mathcal{D}) = 3$

Fall 6:

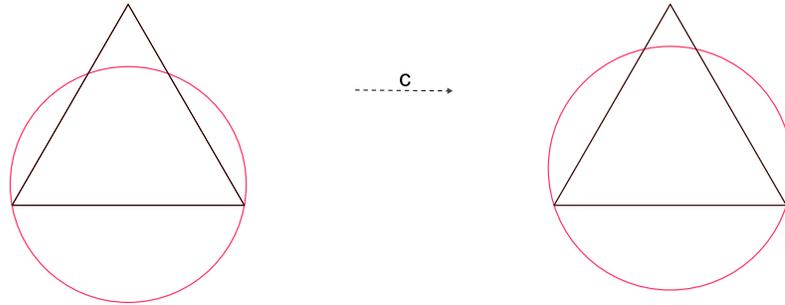


Abbildung 15: $\text{Grad}(\mathcal{C}) = 2$: Fall 6

Wir berechnen: $\text{Grad}(\mathcal{D}) = 2 * 2 - 1 - 1 - 0 = 2$

Fall 7:

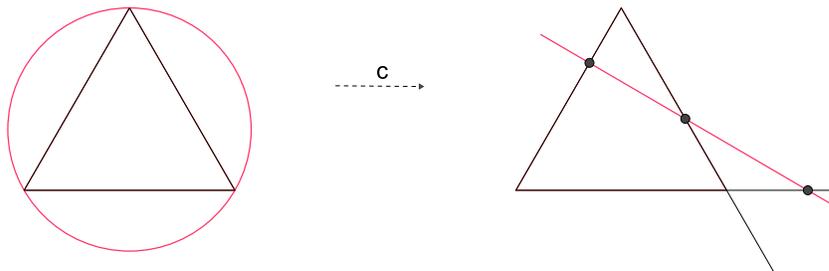


Abbildung 16: $\text{Grad}(\mathcal{C}) = 2$: Fall 7

Wir berechnen: $\text{Grad}(\mathcal{D}) = 2 * 2 - 1 - 1 - 1 = 1$

Für $\text{Grad}(\mathcal{C}) = 3$ hat man höchstens Kurven von Grad 6 (Sextiken) im Bild. Hier sieht man eine Sextik ($\text{Grad}(\mathcal{D}) = 2 * 3 - 0 - 0 - 0 = 6$) mit 3 singulären Punkten mit Multiplizität 3 und je drei verschiedenen Tangenten und $f_3 = \mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3$ wobei für $i \neq j$: $\mathcal{C}_i \neq \mathcal{C}_j$:

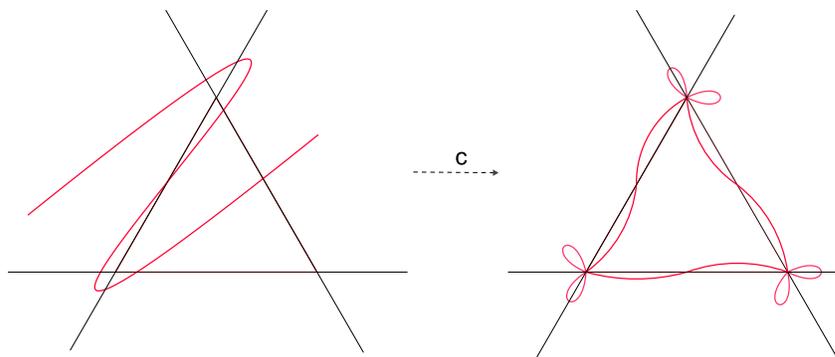


Abbildung 17: Sextik